Instituto Superior de Economia e Gestão

**Investigação Operacional II** - licenciatura MAEG - 2018/19

 Data: 4 /07/2019 Época Recurso Duração: 2 horas

Nota: **Justifique todas as respostas.**

**1.** Um promotor comercial está a preparar um grande evento musical, para o dia 1 de Outubro, cujas tarefas são as seguintes (duração em dias):

Act. A B C D E F G H I J

Act Prec. - - A,B C A B C C F,H I

D. Normal 12 12 16 17 8 12 6 8 6 6

D. Acelerada 10 8 12 15 6 8 5 6 5 2

C. unit. Acel. 6 5 6 2 2 4 3 4 3 4

D. padrão duração 4 3 5 6 2 3 1 2 1 2

*a)* ***(3,0 valores)****Desenhe a rede e determine o caminho crítico, para durações normais, indicando a duração do projecto e as margens totais e livres das actividades;*

*b)* ***(1,5 valores****) O promotor dá um bónus de 5 u.m. por cada dia de antecipação do concerto. Estabeleça um modelo para tomar uma decisão;*

*c)* ***(1,0 valores)*** *Suponha que só pode acelerar uma actividade. Diga qual a actividade e qual o nível de aceleração, tendo em conta o resultado da alínea a) e a informação da alínea b) de um ganho de 5 por dia de antecipação.*

**2.** Duas cadeias de supermercados, I e II, estudam a implantação de lojas em duas localidades, A e B, encarando ambas a instalação de uma loja em cada local ou apenas uma loja nos dois locais. Na localidade A, as receitas totais previstas anualmente são 200 mil €. Na localidade B as receitas respectivas são de 150 mil €. Se ambas as cadeias tiverem lojas na mesma localidade, ou à mesma distância de uma localidade, a cadeia I obtém 60% das receitas da localidade, pois esta tem uma marca mais poderosa e melhor organização e marketing, e a outra cadeia a parte restante. No caso de lojas dos dois concorrentes estarem em localidades diferentes, o factor proximidade implica uma vantagem de quota, sendo de 90% para quem estiver mais próximo (10% das receitas são obtidas de clientes que se deslocam por efeito de fidelização à marca). Por efeito das economias de escala e de sinergias logísticas, os custos anuais associados ao funcionamento de uma loja são de 40 mil € enquanto no caso de duas lojas são, no total, de 60 mil €*, s*endo iguais para as duas cadeias.

1. ***(2,0 valores)****. Construa a matriz do jogo, caracterize-o, identifique as estratégias, e determine o ponto de equilíbrio em estratégias puras, se existir, e caracterize-o;*
2. ***(2,0 valores)*** *Suponha um problema do mesmo tipo, mas em que a cadeia I utiliza apenas duas localizações, sendo a matriz de ganhos dos dois jogadores a seguinte:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | **Cadeia II** |  |
|  | **E1** | **E2** | **E3** |
|  **E1** | **(8; 5)** | **(7; 6)** | **(5; 8)** |
|  **E2** | **(6; 7)** | **(8; 5)** | **(7; 4)** |

*Obtenha o ponto de equilíbrio de Nash (se não conseguir resolver, elimine a estratégia 2 da cadeia II, mas a simplificação não é uma resposta alternativa);*

1. ***(1,5 valores)*** *Para a matriz da alínea anterior, obtenha a solução maximin para cada uma das cadeias, compare-a com a solução anterior e comente as diferenças.*

3. A PIZZAFAM é uma empresa que fabrica e congela produtos artesanais, tais como bolos,rissóis, croquetes, pasteis,pizas, etc. como o mesmo equipamento. Relativamente às pizas, o processo de produção permite fazer 500 pizas por dia, que são guardadas para congelar num armazém frigorífico. O custo de iniciar a produção é de 100€ e o custo de manter uma piza no armazém frigorífico durante um ano, para além dos custos de imobilização de capital, é de 3€. Cada pizza tem um custo de produção de 5€ e esta empresa tem um custo de capital de 15% ao ano. A procura anual é 50 000 pizzas (considere que o ano tem 250 dias úteis de produção). A preparação do equipamento, incluindo a sua limpeza, demora dois dias.

1. ***(1,0 valores)*** *Determine a politica de produção de pizas e os respectivos custos anuais;*
2. ***(2,0 valores****)Para libertar os equipamentos para outros produtos, a empresa encara encomendar as pizas a outra entidade que lhas vende cada uma por 4,6 €, mas só faz lotes mínimos de 8 000 pizas, custando cada encomenda 2 000€ e demorando duas semanas a chegar. Entretanto, sabe-se que a procura anual é normal, com média 50 000 e desvio padrão 2 000. Caso não haja pizas desta marca à venda, os clientes optam por outras alternativas. Para definir a política, a empresa estabelece um nível de serviço que corresponde a satisfazer 99% da procura esperada anualmente. Os custos de stock têm a mesma estrutura. Estabeleça a politica, incluindo o Ponto de encomenda, stock de segurança e probabilidade de ruptura;*
3. ***(1,5 valores)*** *Cada piza é vendidas por 11 euros, com direito a um brinde no valor de um euro, sendo um produto com boa margem, e o CEO (Chief Executive Officer) acha que a politica definida atrás tem gerado demasiadas rupturas e pede um reavaliação da mesma. Supondo que era responsável, acha que o CEO tem razão? Se sim, qual a política que propunha? Justifique*;
4. ***(1,0 valores****)Em que medida a incerteza afecta a política de stocks?*
5. Numa clínica dentária as consultas estão marcadas para as manhãs, das 9:00 horas às 11:30 horas. As consultas são marcadas em intervalos de 30 minutos, começando a primeira às 9:00 horas e sendo a última desse dia marcada para as 11:00 horas, uma vez que o médico tem serviço num hospital a partir das 12:00 horas. Cada paciente que tem consulta marcada chega, de acordo com uma distribuição uniforme, no intervalo que começa 5 minutos antes e termina 5 minutos depois relativamente à hora marcada. O tempo, em minutos, que demora a consulta é uma variável aleatória com a v.a. com f.d. $f\left(x\right)=x^{2}/21000, 10\leq x\leq 40$.
	1. ***(1,0 valores)*** *como o médico só consulta 5 pacientes por manhã, utilize as v.a. anteriores para gerar as suas chegadas e os tempos que eles vão estar a ser consultados (arredonde os minutos para o inteiro mais próximo);*
	2. ***(2.5 valores)*** *Como o médico, para não chegar atrasado, deve sair até às 11:45 horas, simule o funcionamento do sistema numa manhã, diga se neste dia vai chegar, ou não, a horas ao hospital e calcule os seguintes indicadores: tempo médio de permanência de cada paciente no consultório, comprimento médio da fila, número médio de pacientes no consultório e tempo médio de espera por paciente. Se resolveu a alínea anterior, utilize os valores já gerados.*

***Obs.1*** NPAs para as chegadas dos pacientes: 0,48; 0,75; 0,58; 0,45; 0,59

NPAs para os tempos das consultas: 0,27; 0,82; 0,21; 0,32; 0,74

O Professor

Tópicos de Resolução – IO2\_ER\_2019

1. ***a)*** E-8

 A-12

 C-16 D-17

 B-12 H-8 G-6 J-6

 F-12 I-6

Acont. 1 2 3 4 5 6 7 8 9

DC 0 12 12 12 28 36 28 42 48

DT 0 12 12 12 28 36 42 42 48

Act. A B C D E F G H I J

MT 0 0 0 3 28 12 14 0 0 0

ML 0 0 0 3 28 12 14 0 0 0

Caminho Crítico = {A, Fict., C, H, I, J}; Duração do C. Crítico = 48 dias. Existe outro caminho com a mesma duração, {B, Fict., C, H, I, J}, mas para efeitos de eventuais cálculos probabilísticos deve ser excluído, por ter menor variância (43 em vez de 50).

***b)*** $Maxz=5[48-\left(x\_{9}-x\_{1}\right)]-(2D+2E+4F+3G+4H+3I+4J)$

$x\_{2}-x\_{1}\geq 12; x\_{3}-x\_{1}\geq 12; x\_{4}-x\_{2}\geq 0; x\_{4}-x\_{3}\geq 0; x\_{5}-x\_{4}\geq 16; x\_{6}-x\_{3}\geq 12; x\_{6}-x\_{5}+H\geq 8; x\_{7}-x\_{5}+\geq 0;x\_{8}-x\_{6}+I\geq 5; x\_{9}-x\_{2}+E\geq 8; x\_{9}-x\_{5}+D\geq 17; x\_{9}-x\_{7}+G\geq 6; x\_{9}-x\_{8}+J\geq 6;D\leq 2; E\leq 2;G\leq 1;H\leq 2;I\leq 1; J\leq 4; x\_{9}-x\_{1}\leq 48; D,…J, x\_{j}\geq 0, j=1,…9$

Nota. As actidades A, B e C podem ser excluídas da opção de aceleração, pois têm custos unitários de aceleração por dia não inferiores à economia conseguida por dia de antecipação. D, E e F também podiam ser excluídas, pois só podem ser aceleradas em conjunto com outras, ficando o custo unitário não inferior a 5, mas a simplificação não traz grandes vantagens, para além do tamanho, podendo induzir em erros involuntários.

D-Nº de dias de aceleração da actividade D

….

J- Nº de dias de aceleração da Actividade J

$x\_{j}-momento de ocorrência do acontecimento j, j=1,…,9$

* 1. Seria a actividade J, pois permite acelerar 3 dias (a actividade D torna-se crítica por ter MT=3) e ganhar 3= 5\*3 - 4\*3: H (5\*2-4\*2=2); I (5\*1-3\*1=2)) ; actividades A, B e C têm custos unitários não inferiores a 5; as Restantes actividades têm MT>0, logo não devem ser aceleradas isoladamente. É fácil de verificar, pela rede, que a solução óptima consiste em acelerar I um dia e J ou H dois dias, com um lucro adicional de 4.
1. *a)* Estratégias da Cadeia I: E1- Construção de uma loja na localidade A (A); E2 – Construção de uma loja na localidade B (B); E3 – Construção de uma loja na localidade A e de outra na localidade B (AB). Idem para a Cadeia II. A matriz de ganhos é dada por:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | **Cadeia II** |  |
|  |  | A | B | AB |
|  | A | (170; 100) | (155; 115) | (95; 155) |
|  **Cadeia I**  | B | (115; 155) | (170; 100) | (70; 180) |
|  | AB | (195; 55) | (210; 40) | (150; 80) |

Jogo finito, de informação perfeita, de dois jogadores, estático, de soma não constante, podendo ter solução não cooperativa (em principio as leis da concorrência impedem a cooperação, pelo menos comercial) ou cooperativa. (AB; AB) é ponto de equilíbrio de Nash (equilibrio não cooperativo), ou seja, cada uma constrói duas lojas, uma em cada localidade. Ninguém melhora (piora mesmo) a posição se mudar.

Trata-se de um equilíbrio dominante, AB é estratégia dominante para as duas cadeias. Qualquer das soluções (A; A), (A; B), (B; A) e (B; B) possibilita maiores ganhos para as duas cadeias, mas pressupões cooperação (que pode ser proibida) e distribuição num jogo cooperativo.

*b)* ***Ganho Esperado da Cadeia II****:*

* *Se Cadeia II escolhe E1:* $5x +7(1-x$***) =*** $- 2x+7$
* *Se Cadeia II escolhe E2:* $      6x+5(1-x$***) =*** $x+5$
* *Se Cadeia II escolhe E3****:*** $8x+4(1-x)$***= 4x+4***

***Melhor resposta da Cadeia II em função de*** $x $

* ***Para*** $x $***< 1/3, Cadeia II deve escolher E1,***
* ***Para*** $1/3\leq x$ ***< 1/2, Cadeia II deve escolher E1***
* ***Para*** $1/2<x<2/3$***, Cadeia II deve escolher E3***
* ***Para*** $x\geq 2/3$***, Cadeia II deve escolher E3***

Portanto, E2 nunca é escolhida, vindo em síntese:

* ***Para*** $x $***< 1/2, Cadeia II deve escolher E1,***
* ***Para*** $x>1/2$***, Cadeia II deve escolher E3***
* ***Para*** $x=1/2$***, é indiferente escolher E1 ou E3***

A estratégia da Cadeia I é então $x=\frac{1}{2},ou seja, \left(E1;E2\right) com (1/2;1/2)$ **(ponto de Nash, pois não melhora se mudar).**

***Ganho Esperado da Cadeia I****:*

* *Se Cadeia I escolhe E1:* $8y +5(1-y$***) =*** $3y+5$
* *Se Cadeia I escolhe E2:* $    6y+7(1-y$***) =*** $-y+7$

***Melhor resposta da Cadeia I em função de*** $y $

* ***Para*** $y $***< 1/2, Cadeia I deve escolher E2,***
* ***Para*** $y>1/2$***, Cadeia I deve escolher E1***
* ***Para*** $y=1/2$***, é indiferente escolher E1 ou E2***

A estratégia da Cadeia II é então $y=\frac{1}{2},ou seja,\left(E1;E3\right) com (1/2;1/2)$

**Ganho esperado da Cadeia I=8\*1/2\*1/2+5\*1/2\*1/2+6\*1/2\*1/2+7\*1/2\*1/2=26/4=6,5**

**Ganho esperado da Cadeia II=5\*1/2\*1/2+8\*1/2\*1/2+7\*1/2\*1/2+4\*1/2\*1/2=24/4=6,0**

*c) Solução Maximin para Cadeia I: min de E1=min(8; 7; 5)=5; min de E2=min(6; 8; 7)=6; Maximin=Max(5; 6)=6, correspondente a E2;*

*Solução Maximin para Cadeia II: min de E1=min(5; 7)=5; min de E2=min(6; 5)=5; min de E3=min(8; 4)=4; Maximin=Max(5; 5; 4)=5, correspondente a E1 ou E2. Quer o ponto (E2; E1) quer o ponto ((E2; E2) não são pontos de equilíbrio. No ponto (E2; E1), a cadeia I é incentivada a passar para E1. No ponto (E2; E2), a cadeia II é incentivada a mudar para E1. Neste caso estratégias Maxmin não são estáveis, não são pontos de equilíbrio de Nash.*

1. ***a)*** P = 250\*500 = 125 000; A = 100; IC = 0,15\*5+3 =3,75; D = 50 000; L = 2 dias

$$QEP= \sqrt{\frac{2\*100\*50 000}{3,75}}\*\sqrt{\frac{125 000}{125 000-50 000}}≈2 108$$

Stock Máximo = 2 108\*(1-50 000/125 000)$ ≈1 265$

$T\_{d}=\frac{1 265}{50 000}=0,0253≈6,3 dias$; T = 2 108/50 000 = 0,0422 $≈10,5 dias$;

 $P. Enc. =\frac{2}{250}\*50 000=400; m = Int\left(\frac{L}{T}\right)=Int \left(\frac{\frac{2}{250}}{\frac{2 108}{50 000})}\right)=0$;

$$Custo anual=5\*50 000+100\*\frac{50 000}{2 108}+3,75\*\frac{1 265}{2}=254 743$$

***b)*** $Q\_{W}=\sqrt{\frac{2\*2 000\*50 000}{3,69}}≈7362$; $SLM1=1-\frac{E\left[η\left(x, r\right)\right]}{D}\frac{D}{Q}=0,99⟹\frac{E\left[η\left(x, r\right)\right]}{Q}=0,01⟹Q=8 000$**;** $X∩N\left(1 923;392,2\right)$**;** $E\left[η\left(x, r\right)\right]=0,01Q=80=E\left[η\left(x, r\right)\right]=392,2NL\left(\frac{r-1923}{392,2}\right)=80⟹NL\left(\frac{r-1923}{392,2}\right)=0,204$$⟹ \frac{r-1923}{392,2}=0,48⟹r≈2 111$***;***

$X\_{L}∩N\left(1923;392,2\right);μ=50 000\*\frac{2}{52}; σ=2 000\sqrt{\frac{2}{52}}$

$ Prob\left(ruptura no ciclo\right)≈31,6\%$***;*** $Q.Enc.=8 000;P. Encomenda 2 111;$

$$Stock Segurança=2 111-1 923+80≈268;$$

***c)*** $IC =4,6\*0,15+3 =3,69$; $p=11-1-4,6=5,4;$ $Q=8 000;$ $H\left(r\right)=\frac{8 000\*3,69}{8 000\*3,69+5,4\*50 000}≈9,9\% ⟹r≈2 429$**;** $E[η\left(2 429\right)=392,2NL\left(\frac{2 429-1 923}{392,2}\right)=392,2NL\left(1,29\right)=392,2\*0,0465=18,2$ **P. Encomenda = 2 429; Stock segurança =524,2;**

*C*usto anual (P.Actual)=4,6\*50 000+2 000\*50 000/8 000+3,69\*(8 000/2+268)+5,4\*50 000/8 000\*80

$≈$**260 949**

*C*usto anual(P.Nova)=4,6\*50 000+2 000\*50 000/8 000+3,69\*(8 000/2+524)+5,4\*50 000/8 000\*18

$≈$**259 810**

*O CEO tem razão, a politica deve ser alterada, e haverá menores rupturas, menor probabilidade de ruptura e custos anuais mais baixos, embora as diferenças nos custos sejam de apenas cerca de 1 140, resultado de menores custos de ruptura e maiores custos de stock, mas o nível de serviço e imagem de cumprimento melhora.*

1. ***a)*** Chegadas: $Y∩U\left(-5; +5\right); g\left(y\right)=\frac{1}{10}, -5\leq y\leq 5;G\left(y\right)=\frac{y+5}{10}=R\_{C}⇒y=-5+10R\_{C}$

$Tempo consulta:X∩f\left(x\right)=\frac{x^{2}}{21 000}, 10\leq x\leq 40;F\left(x\right)=\frac{x^{3}-1 000}{63 000}=R\_{T}⇒x=10\sqrt[3]{1+63R\_{T}}$

$$1ª chegada=-5+10\*0,48=-0,2≈ 0⇒x=9:00; Tempo consulta=26 m$$

$$2ª chegada=-5+10\*0,75= 2,5≈ 3⇒x=9:33; Tempo consulta=37 m$$

$$3ª chegada=-5+10\*0,58= 0,8≈ 1⇒x=10:01; Tempo consulta=24 m $$

$$4ª chegada=-5+10\*0,45=-0,5≈-1⇒x=10:29; Tempo consulta=28 m $$

$$5ª chegada=-5+10\*0,59= 0,9≈ 1⇒x=11:01; Tempo consulta=36 m $$

$$1ª consulta=10\sqrt[3]{1+63\*0,27}≈26; 2ª consulta=10\sqrt[3]{1+63\*0,82≈37}$$

$$3ª consulta=10\sqrt[3]{1+63\*0,21}≈24; 4ª consulta=10\sqrt[3]{1+63\*0,32}≈28$$

$$5ª consulta=10\sqrt[3]{1+63\*0,74}≈36$$

***b)***

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Nº Paciente | Tempo | Pacientes | Tempo cons. | Próx. Cheg. | Próx. Saida | Prox. Acont. |
| 1º Cheg | 9:00 | 1 | 26 | 9:33 | 9:26 | Saída |
| Saída | 9:26 | 0 | - | 9:33 | - | Chegada |
| 2º Cheg | 9:33 | 1 | 37 | 10:01 | 10:10 | Chegada |
| 3ª Cheg | 10:01 | 2 | - | 10:29 | 10:10 | Saída |
| Saída | 10:10 | 1 | 24 | 10:29 | 10:34 | Chegada |
| 4ª Cheg | 10:29 | 2 | - | 11:01 | 10:34 | Saída |
| Saída | 10:34 | 1 | 28 | 11:01 | 11:02 | Chegada |
| 5ª Cheg | 11:01 | 2 | - | - | 11:02 | Saída |
| Saída | 11:02 | 1 | 36 | - | 11:38 | Saída |
| Saída | 11:38 | 0 | - | - | -- |  |

Não vai sair atrasado, pois pode sair às 11:38, antes das 11:45.

Tempo de funcionamento= 158 m, ou, 2h e 38 m (das 9:00 às 11.38)

Tempo nas consultas = 151 minutos (26+37+24+28+36), ou seja, 2h e 31 m.

Tempo médio na consulta =30,2 minutos (151/5)

Tempo médio no consultório =33,2 minutos (30,2+3=166/5)

Tempo de espera =9\*1+5\*1+1\*1=15 minutos, isto é, em média 3 minutos por paciente (15/5).

Tempo de inatividade= 7 minutos (entre as 9:26 e as 9:33)

Comprimento médio da fila =15/158=0,095

Nº médio pacientes no consultório =166/158=1,05